

335

F

نام

نام خانوادگی

محل امضاء



335F

صبح جمعه

۹۱/۱/۲۵

اگر دانشگاه اصلاح شود مملکت اصلاح می شود.  
امام خمینی (ره)

جمهوری اسلامی ایران  
وزارت علوم، تحقیقات و فناوری  
سازمان سنجش آموزش کشور

**آزمون ورودی**  
**دوره های دکتری (نیمه متمرکز) داخل**  
**در سال ۱۳۹۱**

**رشته های**  
**مهندسی مکانیک - طراحی کاربردی (دینامیک، کنترل و ارتعاشات) (کد ۲۳۲۳)**

شماره داوطلبی:

نام و نام خانوادگی داوطلب:

مدت پاسخگویی: ۱۵۰ دقیقه

تعداد سؤال: ۴۵

عنوان مواد امتحانی، تعداد و شماره سؤالات

| ردیف | مواد امتحانی  | تعداد سؤال | شماره | شماره |
|------|---|------------|-------|-------|
| ۱    | مجموعه دروس تخصصی (ریاضیات مهندسی، دینامیک پیشرفته، ارتعاشات پیشرفته) | ۴۵         | ۱     | ۱     |

فروردین سال ۱۳۹۱

استفاده از ماشین حساب مجاز نمی باشد.

۱- اگر جواب مسئله مقدار اولیه

$$\begin{cases} u_t - a^2 u_{xx} = 0, & -\infty < x < \infty, t > 0 \\ u(x, 0) = \begin{cases} T_1, & x > 0 \\ T_2, & x < 0 \end{cases} \end{cases}$$

را به صورت  $u(x, t) = f\left(\frac{x}{\sqrt{a\sqrt{t}}}\right)$  جستجو کنیم، آنگاه  $u(x, t) = A + B\psi\left(\frac{x}{\sqrt{a\sqrt{t}}}\right)$  که در آن:

$$B = \frac{T_1 - T_2}{\sqrt{\pi}}, A = \frac{T_1 + T_2}{2}, \psi(z) = \int_0^z e^{-s^2} ds \quad (1)$$

$$B = \frac{T_1 + T_2}{\sqrt{\pi}}, A = \frac{T_1 - T_2}{2}, \psi(z) = \int_0^z e^{-s^2} ds \quad (2)$$

$$B = \frac{T_1 - T_2}{\sqrt{\pi}}, A = \frac{T_1 + T_2}{2}, \psi(z) = \int_0^z e^{-s^2} ds \quad (3)$$

$$B = \frac{T_1 - T_2}{\sqrt{\pi}}, A = \frac{T_1 + T_2}{2}, \psi(z) = \int_0^z e^{-s^2} ds \quad (4)$$

۲- مسئله مقدار مرزی، با شرایط مرزی داده شده در داخل مستطیل  $0 \leq y \leq b$  و  $0 \leq x \leq a$ 

$$\begin{cases} \nabla^2 u = f(x, y) \\ u(x, 0) = 0, u(x, b) = h(x) \\ u(0, y) = u(a, y), u_x(0, y) = u_x(a, y) \end{cases}$$

که در آن  $f$  و  $h$  توابع پیوسته و نگاهای هموار هستند، دارای کدام بایست معتمد است؟ (نسبت به متغیر  $x$ )

$$1, \cos \frac{\gamma k \pi x}{a}, \sin \frac{\gamma k \pi x}{a}, k = 1, 2, 3, 4, \dots \quad (1)$$

$$1, \cos \frac{k \pi x}{a}, \sin \frac{k \pi x}{a}, k = 1, 2, 3, 4, \dots \quad (1)$$

$$\cos \frac{k \pi x}{a}, \sin \frac{k \pi x}{a}, k = 1, 2, 3, 4, \dots \quad (2)$$

$$\cos \frac{\gamma k \pi x}{a}, \sin \frac{\gamma k \pi x}{a}, k = 1, 2, 3, 4, \dots \quad (3)$$

۳- با یک تبدیل خطی کسری  $T$  سه نقطه  $Z_1 = -a, Z_2 = 0, Z_3 = a$  از صفحه  $z$  به سه نقطه

$$W_1 = \infty, W_2 = -1, W_3 = 0 \text{ از صفحه } w \text{ برده می شوند. ثابت } a \text{ چه باشد تا ترکیب } T \circ T \circ T \text{ تابع همانی شود؟}$$

$$1 \quad (3) \quad -1 \quad (2) \quad -2 \quad (1)$$

۴- اگر بخواهیم دایره به مرکز  $\alpha$  در صفحه  $w$  که از نقطه  $1$  می گذرد، توسط نگاشت  $w = \frac{z+1}{z-1}$  به عمود منصف قطعه خط

واصل از  $1$  به  $\gamma$  در صفحه  $z$  نگاشته شود آنگاه مقدار  $\gamma$  بر حسب  $\alpha$  کدام است؟

$$\gamma = \frac{\alpha + 1}{\alpha - 1} \quad (4) \quad \gamma = \frac{1 + \alpha}{1 - \alpha} \quad (3) \quad \gamma = \frac{\alpha - 1}{\alpha + 1} \quad (2) \quad \gamma = \frac{1 - \alpha}{1 + \alpha} \quad (1)$$

۵- در صورتی که جواب مسئله مقدار اولیه

$$\begin{cases} u_t - a^2 u_{xx} = f(x, t) & , t > 0, \quad -\infty < x < \infty \\ u(x, 0) = 0 & , -\infty < x < \infty \end{cases}$$

به صورت:

$$u(x, t) = \int_0^t \frac{1}{2a\sqrt{\pi(t-\tau)}} \left[ \int_{-\infty}^{\infty} e^{\frac{-(x-\xi)^2}{4a^2(t-\tau)}} f(\xi, \tau) d\xi \right] d\tau \quad (1)$$

باشد، آنگاه جواب مسئله مقدار اولیه - مرزی:

$$\begin{cases} u_t - a^2 u_{xx} = f(x, t) & , \forall x > 0, \forall t > 0 \\ u(x, 0) = 0, u(0, t) = 0 \end{cases}$$

نیز به صورت (۱) قابل نمایش است منتها به جای انتگرال داخل کروشه باید انتگرال زیر را جانشین نمود.

$$\begin{aligned} & \int_{-\infty}^{\infty} \xi e^{\frac{-(x-\xi)^2}{4a^2(t-\tau)}} f(\xi, \tau) d\xi \quad (1) \\ & \int_0^{\infty} \left( e^{\frac{-(x+\xi)^2}{4a^2(t-\tau)}} - e^{\frac{-(x-\xi)^2}{4a^2(t-\tau)}} \right) f(\xi, \tau) d\xi \quad (2) \\ & \int_0^{\infty} \left( e^{\frac{-(x-\xi)^2}{4a^2(t-\tau)}} - e^{\frac{-(x+\xi)^2}{4a^2(t-\tau)}} \right) f(\xi, \tau) d\xi \quad (3) \\ & \int_{-\infty}^{\infty} \left[ e^{\frac{-(x-\xi)^2}{4a^2(t-\tau)}} f(\xi, \tau) - e^{\frac{-(x+\xi)^2}{4a^2(t-\tau)}} f(-\xi, \tau) \right] d\xi \quad (4) \end{aligned}$$

۶- با انتگرال گیری از تابع  $\frac{e^{iaz}}{e^z + e^{-z}}$ ,  $\alpha \in \mathbb{R}$ , نسبت به متغیر  $z$  روی مرز ناحیه  $|x| \leq R$ ,  $0 \leq y \leq \pi$  در جهت مثبت، و

سپس میل دادن  $R$  به بینهایت، تبدیل فوری به تابع  $f(x) = \frac{1}{\cosh x}$  به کدام صورت حاصل می شود؟

$$\frac{\pi}{\cosh\left(\frac{\pi}{2}\alpha\right)} \quad (1) \quad \frac{\pi}{\cosh(\pi\alpha)} \quad (2) \quad \frac{\pi}{\cosh\left(\frac{\pi}{2}\alpha\right)} \quad (3) \quad \frac{\pi}{\cosh(\pi\alpha)} \quad (4)$$

-۷ مسئله مقدار اولیه - مرزی به صورت

$$\begin{cases} u_t - u_{xx} = f(x, t) & , 0 < x < L, t > 0 \\ u(x, 0) = \phi(x) & , 0 \leq x \leq L \\ u_x(0, t) = 0, u(L, t) = 0 & , t > 0 \end{cases}$$

داده شده است که در آن توابع  $\phi(x)$  و  $f(x, t)$  پیوسته و تکه‌ای هموار فرض شده‌اند. پایه متعامد نسبت به متغیر  $x$  در این مسئله کدام است؟

$$\left\{ \cos \frac{(\gamma k - 1)\pi x}{2L} \right\}_{k \in \mathbb{N}} \quad (1)$$

$$\left\{ \cos \frac{(\gamma k - 1)\pi x}{L} \right\}_{k \in \mathbb{N}} \quad (2)$$

$$\left\{ \sin \frac{(\gamma k - 1)\pi x}{L} \right\}_{k \in \mathbb{N}} \quad (3)$$

(۴) از پایه کامل استفاده نمی‌شود، بلکه در بازه  $0 \leq x \leq L$  بخشی از یک پایه متعامد به کار گرفته می‌شود.

-۸ اگر برای مسئله مقدار اولیه - مرزی

$$\begin{cases} u_t - u_{xx} = f(x, t) & , 0 < x < L, t > 0 \\ u(x, 0) = 0, u_x(0, t) = 0, u(L, t) = 0 \end{cases}$$

کандید جواب به صورت

$$u(x, t) = \sum_{k=1}^{\infty} u_k(t) \cos \frac{(\gamma k - 1)\pi x}{2L}$$

قابل بیان باشد، به ازای تابع

$$f(x, t) = \sin \gamma t \cdot \cos \frac{\pi x}{2L}$$

جواب مسئله کدام است؟ (قرار می‌دهیم  $\alpha = \frac{\pi}{2L}$ )

$$\left[ \frac{-\gamma}{\gamma^2 + \alpha^2} \cos(\gamma t) + \frac{\gamma}{\gamma^2 + \alpha^2} e^{-\alpha^2 t} \right] \cos(\alpha x) \quad (1)$$

$$\left[ \frac{-\gamma}{\gamma^2 + \alpha^2} \cos(\gamma t) + \frac{\alpha^2}{\gamma^2 + \alpha^2} \sin(\gamma t) - \frac{\gamma}{\gamma^2 + \alpha^2} e^{-\alpha^2 t} \right] \cos(\alpha x) \quad (2)$$

$$\left[ \frac{-\gamma}{\gamma^2 + \alpha^2} \cos(\gamma t) + \frac{\alpha^2}{\gamma^2 + \alpha^2} \sin(\gamma t) + \frac{\gamma}{\gamma^2 + \alpha^2} e^{-\alpha^2 t} \right] \cos(\alpha x) \quad (3)$$

$$\left[ \frac{-\gamma}{\gamma^2 + \alpha^2} \cos(\gamma t) + \frac{\alpha}{\gamma^2 + \alpha^2} \sin(\gamma t) + \frac{\gamma}{\gamma^2 + \alpha^2} e^{-\alpha^2 t} \right] \cos(\alpha x) \quad (4)$$

- ۹- پتانسیل الکترواستاتیک کراندار  $V$  در نیمه بالایی صفحه  $xy$  در معادله دیفرانسیل لاپلاس صدق می‌کند با شرایط مرزی  $V(x, 0) = A_0$  به ازای  $x > 0$  و  $V(x, 0) = 2A_0$  به ازای  $x < 0$ . اگر نقاط  $P = (1, 1)$  و  $Q = (1, \sqrt{3})$  با مختصات دکارتی را در نظر بگیریم، اختلاف پتانسیل  $V(Q) - V(P)$  کدام است؟ ( $A_0$  ثابت)

$$(1) \frac{A_0}{24} \quad (2) \frac{A_0}{12} \quad (3) \frac{A_0}{8} \quad (4) \frac{A_0}{6}$$

- ۱۰- دمای مانای کراندار  $T(u, v)$  در نیم صفحه  $v \geq 0$  را چنان بیابید که بر قسمت  $u < -1$ ،  $v = 0$  از کرانه شرط  $T = b$ ، و بر قسمت  $u > 1$ ،  $v = 0$  از کرانه شرط  $T = a$  (و  $b$  ثابت حقیقی)، و پاره خط  $-1 < u < 1$ ،  $v = 0$  از کرانه نیم صفحه، عایق باشد؟

$$(1) \frac{a+b}{2} + \frac{b-a}{\pi} \operatorname{Arctan} \frac{v}{u}$$

$$(2) \frac{a+b}{2} + \frac{a-b}{2} \operatorname{Arcsin} \frac{\sqrt{(u+1)^2 + v^2} - \sqrt{(u-1)^2 + v^2}}{2}$$

$$(3) \frac{a+b}{2} + \frac{b-a}{\pi} \operatorname{Arcsin} \frac{\sqrt{(u+1)^2 + v^2} - \sqrt{(u-1)^2 + v^2}}{2}$$

$$(4) \frac{a+b}{2} + \frac{a-b}{\pi} \operatorname{Arcsin} \frac{\sqrt{(u+1)^2 + v^2} - \sqrt{(u-1)^2 + v^2}}{2}$$

- ۱۱- اگر بسط به سری فوریه کسیکوسین نیم دایره تابع  $f(x) = \sin x$ ،  $0 < x < \pi$  به صورت زیر باشد:

$$f(x) = \frac{\pi}{2} - \frac{2}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(1 + \cos n\pi)}{n^2 - 1} \cos(nx)$$

آنگاه مقدار سری  $\frac{1}{1^2 \times 3^2} + \frac{1}{3^2 \times 5^2} + \frac{1}{5^2 \times 7^2} + \dots$  کدام است؟

$$(1) \frac{\pi^2 - 8}{16} \quad (2) \frac{\pi^2 - 8}{8} \quad (3) \frac{\pi^2 - 8}{3} \quad (4) \frac{\pi^2 - 8}{2}$$

- ۱۲- اگر  $P_n(x)$  به ازای هر عدد صحیح نامنفی  $n$  یک چند جمله‌ای از درجه  $n$  را نمایش دهد، آنگاه مقدار

$$I_k = \int_{-1}^1 (x^k - 2x^2) P_{k-1}(x) dx \quad (k \geq 1)$$

$$, k=1$$

$$, k \geq 2$$

$$(1) I_k = \begin{cases} 0, & k > 2 \\ \frac{1}{3}, & k = 2 \\ 0, & k = 1 \end{cases}$$

$$(3) I_k = \begin{cases} 0, & k = 1 \\ -\frac{2}{3}, & k = 2 \\ 0, & k > 2 \end{cases}$$

$$(4) I_k = 0 \text{ به ازای هر } k \in \mathbb{N}$$

۱۳- اگر  $\oint_C \frac{e^z dz}{(z^2 + 4)(z - 4)} = 2\pi i M$ ، که در آن  $C$  مرز دایره  $|z| = 3$  در جهت مثبت است، در این صورت مقدار انتگرال

مذکور بر روی مرز  $C_1: |z+1| + |z-1| = 4\sqrt{2}$  در جهت مثبت کدام است؟

$$2\pi i M \quad (1)$$

$$2\pi i \left( M + \frac{e^4}{20} \right) \quad (2)$$

$$2\pi i \left( M - \frac{e^4}{20} \right) \quad (3)$$

(۴) قضیه مانده را نمی‌توان در مورد انتگرال مذکور روی  $C_1$  به کار برد.

۱۴- اگر توابع  $u(x, t)$  و  $v(x, t)$  جواب‌های مسائل مقدار اولیه - مرزی زیر باشند:

$$\begin{cases} u_{tt} - u_{xx} = 0, & 0 < x < \pi, t > 0 \\ u(x, 0) = 0 & t > 0 \\ u_t(x, 0) = a \cos \frac{x}{\pi} + b \sin \frac{x}{\pi} = \phi(x) \\ u(0, t) = at, \quad u(\pi, t) = bt \end{cases}$$

$$\begin{cases} v_{tt} - v_{xx} = 0, & 0 < x < \pi, t > 0 \\ v(x, 0) = 0 \\ v_t(x, 0) = \phi(x) - a \left( 1 - \frac{x}{\pi} \right) - \frac{x}{\pi} b \\ v(0, t) = 0 = v(\pi, t) \end{cases}$$

آنگاه  $w(x, t) = u(x, t) - v(x, t)$  برابر کدام یک از گزینه‌هاست؟

$$\begin{aligned} & at \left( 1 - \frac{x}{\pi} \right) + bt \frac{x}{\pi} \quad (1) & a \left( 1 - \frac{x}{\pi} \right) + b \frac{x}{\pi} \quad (1) \\ & at \cos \frac{x}{\pi} + bt \sin \frac{x}{\pi} \quad (2) & at(\pi - x) + btx \quad (3) \end{aligned}$$

۱۵- آیا می‌توان بریدگی‌های شاخه تابع  $f(z) = \frac{\log(1+z^2)}{(3z-i)^2}$  را به گونه‌ای انتخاب کرد که انتگرال  $I = \oint_C \frac{\log(1+z^2)}{(3z-i)^2} dz$

بر مرز  $C: \left| z - \frac{i}{3} \right| = \frac{1}{3}$  در جهت مثبت، با استفاده از مانده قابل محاسبه باشد؟ اگر پاسخ مثبت است، مقدار انتگرال کدام است؟

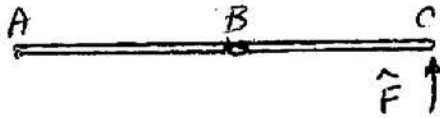
$$(1) \text{ بریدگی‌های شاخه از نقاط } \pm i \text{ به سمت دور شدن از مبدأ، و } I = -\frac{\pi}{6}$$

$$(2) \text{ بریدگی‌های شاخه از نقاط } \pm i \text{ به سمت دور شدن از مبدأ، و } I = -\frac{\pi}{3}$$

(۳) بریدگی‌های شاخه را نمی‌توان به طور مناسب اختیار کرد که انتگرال خواسته شده قابل محاسبه باشد.

(۴) بریدگی‌های شاخه را به هر ترتیبی انتخاب کنیم، انتگرال مذکور روی مرز داده شده با استفاده از مانده قابل محاسبه است.

۱۶- دو میله مشابه هر کدام به طول  $L$  و به جرم  $m$  مطابق شکل زیر به یکدیگر متصل شده‌اند و در حالت سکون روی میز صافی قرار گرفته‌اند. ضربه  $\hat{F}$  به انتهای  $C$  وارد می‌شود، سرعت‌های نقاط  $A$ ،  $B$  و  $C$  عبارت‌اند از:



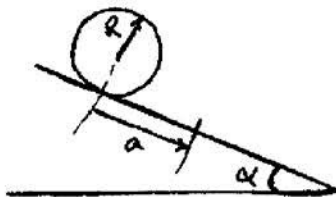
$$u_A = u_B = u_C = \frac{\hat{F}}{2m} \quad (1)$$

$$u_C = \frac{\sqrt{2}\hat{F}}{2m}, u_B = -\frac{\hat{F}}{m}, u_A = \frac{\hat{F}}{2m} \quad (2)$$

$$u_C = \frac{\hat{F}}{m}, u_B = -\frac{\hat{F}}{2m}, u_A = \frac{\Delta\hat{F}}{m} \quad (3)$$

$$u_C = \frac{\Delta\hat{F}}{m}, u_B = -\frac{\sqrt{2}\hat{F}}{m}, u_A = \frac{\hat{F}}{m} \quad (4)$$

۱۷- دیسک به جرم  $m$  و ممان اینرسی  $I$  از حالت سکون از سطح شیب‌دار رها می‌شود. فرض کنید سطح صاف و لغزنده می‌باشد (حرکت لغزشی). وقتی دیسک مسافت  $a$  را طی می‌کند، سرعتش چقدر است؟



$$\sqrt{2ga \sin \alpha} \quad (1)$$

$$\sqrt{\frac{2ga \sin \alpha}{1+I}} \quad (2)$$

$$\sqrt{\frac{2ga \sin \alpha}{1 + \frac{I}{mR^2}}} \quad (3)$$

$$\sqrt{\frac{2ga \sin \alpha}{1 + \frac{I}{mR^2}}} \quad (4)$$

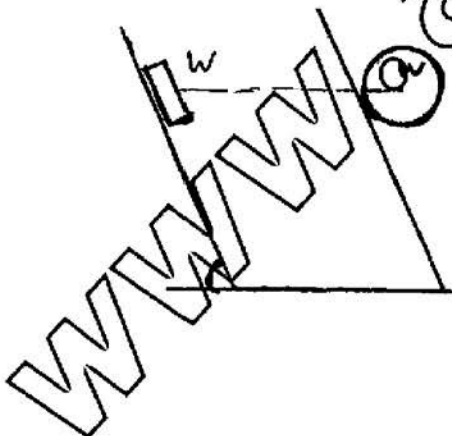
۱۸- از دو سطح شیب‌دار کاملاً مشابه، از یکی وزنه‌ای به وزن  $W$  بدون اصطکاک و از دیگری دیسکی به وزن  $W$  بدون لغزش همزمان و هم سطح رها می‌شوند. کدام یک زودتر فاصله  $15 \text{ ft}$  روی سطح شیب‌دار را طی می‌کنند؟

(۱) دیسک

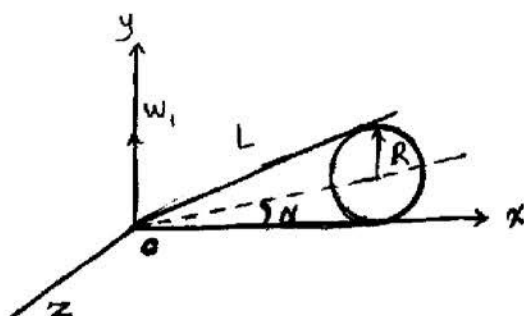
(۲) وزنه

(۳) همزمان

(۴) بستگی به جنس مواد هر یک دارد.



- ۱۹- مخروط دواری روی سطح افق (صفحه  $xy$ ) غلطش بدون لغزش انجام می‌دهد. محور این مخروط حول محور  $oy$  با سرعت زاویه‌ای  $\omega_1$  دوران می‌کند. سرعت زاویه‌ای مطلق مخروط برابر است با:



$$\frac{\omega_1}{\sin \alpha} \quad (1)$$

$$\frac{L \cos^2 \alpha}{R} \quad (2)$$

$$\frac{L}{R} \cos \alpha \omega_1 \quad (3)$$

$$\frac{\cos^2 \alpha}{R} \omega_1 \quad (4)$$

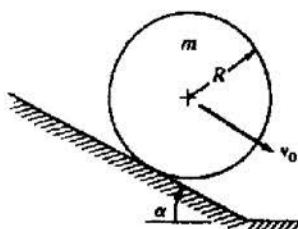
- ۲۰- دوران جسم صلبی حول محور ثابت  $z$  را در نظر می‌گیریم. در چه شرایطی معادلات لنگر خمشی حتماً به فرمول دو بعدی

$$\sum M_G = I \alpha$$

تبدیل می‌گردد؟

- (۱) قطعه همگن باشد.  
(۲) سرعت زاویه‌ای دوران حول محور  $z$  باشد.  
(۳) مبدأ سیستم محورهای مختصات نقطه ثابتی باشد.  
(۴) ممان اینرسی ضربی برابر با صفر باشند.

- ۲۱- دیسک شکل زیر با سرعت اولیه  $v_0$  بر روی سطح شیب‌دار می‌غلتد. برخورد با سطح افق را کاملاً پلاستیک فرض کنید. سرعت زاویه‌ای دیسک پس از برخورد، به فرض آنکه دیسک بلغزد، کدام است؟



$$\dot{\theta} = \frac{v_0}{R} \quad (1)$$

$$\dot{\theta} = \frac{v_0 \cos \alpha}{R} \quad (2)$$

$$\dot{\theta} = \frac{v_0}{R \cos \alpha} \quad (3)$$

$$\dot{\theta} \text{ تابعی است از } m, R, v_0 \text{ و } \alpha \quad (4)$$

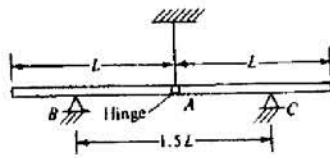
- ۲۲- کدام یک از گزینه‌های زیر در مورد هامیلتونین ( $H$ ) و انرژی کل سیستم ( $E$ ) صحیح است؟  
(۱)  $H$  همیشه با  $E$  برابر است.  
(۲)  $H$  هیچ وقت با  $E$  برابر نیست.  
(۳)  $H$  همیشه بزرگتر از  $E$  است.  
(۴) اگر قیود سیستم مستقل از زمان باشند  $H$  با  $E$  برابر است.

- ۲۳- کدام یک از گزینه‌های زیر در مورد معادلات حرکت صحیح است؟

- (۱) هر مسأله دینامیکی را نمی‌توان با معادلات نیوتون و اولر حل کرد و معادلات حرکت را به دست آورد.  
(۲) اگر تعدادی از قیود مسأله غیر هولونومیک باشند، معادلات حرکت را هم چنان می‌توان با روش لاگرانژ به دست آورد.  
(۳) هر مسأله دینامیکی را می‌توان با معادلات نیوتون و معادلات تعمیم یافته اولر حل کرد و معادلات حرکت را به دست آورد.  
(۴) اگر تعداد مختصات عام بیش از تعداد درجات آزادی سیستم باشند، معادلات حرکت را با روش هامیلتون نمی‌توان به دست آورد.



۲۴- در شکل زیر هر دو میله به کمک نخ در حالت افقی قرار دارند. از کلیه اصطکاک‌ها در مفصل A و تکیه‌گاه‌های B و C صرف‌نظر کنید. مقدار نیروهای عکس‌العمل در تکیه‌گاه‌های B و C بعد از بریدن نخ کدام است؟ (جرم هر میله را  $\frac{m}{2}$  فرض کنید.)



کنید.)

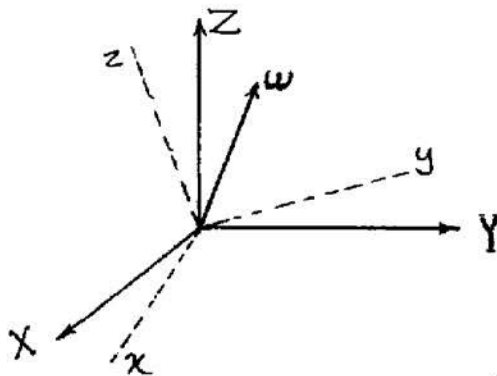
$$\frac{mg}{3} \quad (۱)$$

$$\frac{2mg}{3} \quad (۲)$$

$$\frac{4mg}{3} \quad (۳)$$

$$\frac{2mg}{3} \quad (۴)$$

۲۵- دستگاه XYZ نسبت به XYZ حول محوری با سرعت زاویه‌ای  $\vec{\omega}$  می‌چرخد. رابطه تبدیل مشتق A در این دو دستگاه عبارت است از:



$$\left(\frac{dA}{dt}\right)_{xyz} = \omega \times A \quad (۱)$$

$$\left(\frac{dA}{dt}\right)_{xyz} = \left(\frac{dA}{dt}\right)_{XYZ} \quad (۲)$$

$$\left(\frac{dA}{dt}\right)_{xyz} = \left(\frac{dA}{dt}\right)_{XYZ} + \omega \times A \quad (۳)$$

$$\left(\frac{dA}{dt}\right)_{xyz} = \left(\frac{dA}{dt}\right)_{XYZ} + A \times \omega \quad (۴)$$

۲۶- برای یک نقطه مادی که تحت نیروی جاذبه عمومی حرکت می‌کند، هملتونین در مختصات قطبی برابر است با:

$$H = \frac{1}{2} m \dot{r}^2 + \frac{1}{2} m r^2 \dot{\phi}^2 + \frac{GMm}{r} \quad (۱)$$

$$H = \frac{1}{2} m \dot{r}^2 + \frac{1}{2} m r^2 \dot{\phi}^2 - \frac{GMm}{r} \quad (۲)$$

۲۷- دو معادله قید (Constraint) به صورت زیر داده شده‌اند:

$$(\cos \theta) dx + (\sin \theta) dy + (y \cos \theta - x \sin \theta) = 0 \quad (الف)$$

$$\frac{dy}{dx} = kt, \quad (k = \text{ثابت}, t = \text{زمان}) \quad (ب)$$

نوع قیدها کدام است؟ (هولونومیک یا غیر هولونومیک)

(۱) (الف) و (ب) هر دو هولونومیک

(۲) (الف) و (ب) هر دو غیر هولونومیک

(۳) (الف) هولونومیک، (ب) غیر هولونومیک

(۴) (الف) غیر هولونومیک، (ب) هولونومیک

۲۸- در لحظه نشان داده شده در شکل، نقطه B از میله باریک ۲ کیلوگرمی AB دارای سرعت  $4 \frac{m}{s}$  به سمت پایین می باشد.

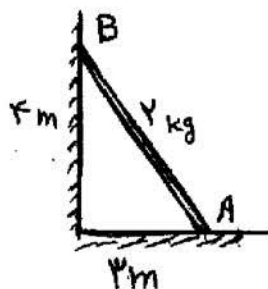
انرژی جنبشی میله چند نیوتن متر (N.m) است؟

(۱)  $16/3$

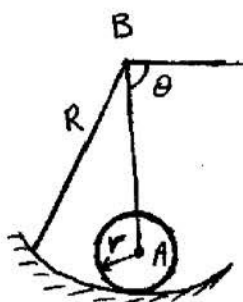
(۲)  $14/8$

(۳)  $13/5$

(۴)  $3/71$



۲۹- دیسک A به جرم m بر روی سطح دایره ای به شعاع R می غلطد. اگر دیسک از حالت سکون در  $\theta = 0^\circ$  رها گردد. سرعت زاویه ای ( $\omega$ ) شعاع BA در  $\theta = 90^\circ$  کدام است؟



(۱)  $\omega = \sqrt{\frac{4g}{r(R-r)}}$

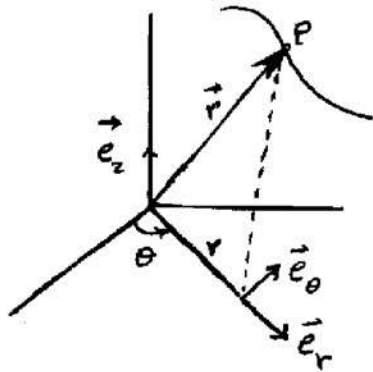
(۲)  $\omega = \sqrt{\frac{4g}{rR-r}}$

(۳)  $\omega = \sqrt{\frac{2g}{R-r}}$

(۴)  $\omega = \sqrt{\frac{4gR}{rr^2}}$

۳۰- بردار وضع نقطه P بر حسب دستگاه مختصات استوانه‌ای نشان داده شده به صورت  $\vec{r} = r\vec{e}_r + z\vec{e}_z$  می‌باشد. سرعت و

شتاب نقطه P نسبت به دستگاه استوانه‌ای چقدر است؟



$$\vec{a}_P = \ddot{r}\vec{e}_r + \ddot{z}\vec{e}_z, \quad \vec{v}_P = \dot{r}\vec{e}_r + \dot{z}\vec{e}_z \quad (۱)$$

$$\vec{a}_P = \ddot{r}\vec{e}_r + \ddot{z}\vec{e}_z + r\ddot{\theta}\vec{e}_\theta, \quad \vec{v}_P = \dot{r}\vec{e}_r + r\dot{\theta}\sin\theta\vec{e}_\theta - r\dot{\theta}\cos\theta\vec{e}_z \quad (۲)$$

$$\vec{a}_P = (\ddot{r} + r\dot{\theta}^2)\vec{e}_r + (r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta})\vec{e}_\theta + \ddot{z}\vec{e}_z, \quad \vec{v}_P = \dot{r}\vec{e}_r + \dot{z}\vec{e}_z \quad (۳)$$

$$\vec{a}_P = (\ddot{r} - r\dot{\theta}^2)\vec{e}_r + (r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta})\vec{e}_\theta + \ddot{z}\vec{e}_z, \quad \vec{v}_P = \dot{r}\vec{e}_r + \dot{z}\vec{e}_z + r\dot{\theta}\vec{e}_\theta \quad (۴)$$

۳۱- معادلات حرکت یک سیستم دو درجه آزادی به صورت زیر است:

$$a_1\ddot{x}_1 + b_1\dot{x}_1 + c_1x_1 = 0$$

$$a_2\ddot{x}_2 + b_2\dot{x}_2 + c_2x_2 = 0$$

به ازاء چه شرطی سیستم غیر مقید است؟

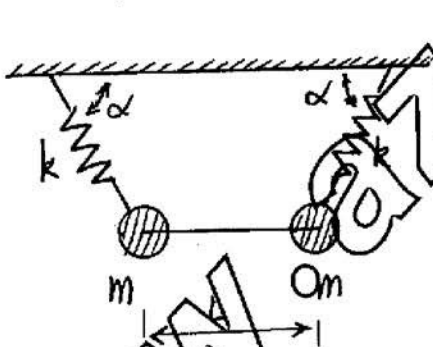
$$b_1c_2 = c_1b_2 \quad (۴)$$

$$a_1c_1 = a_2c_2 \quad (۳)$$

$$b_1c_1 = b_2c_2 \quad (۲)$$

$$a_1b_1 = a_2b_2 \quad (۱)$$

۳۲- برای سیستم نشان داده شده، با فرض نوسانات کوچک و حرکت هر صفحه قائم، فرکانس‌ها و مدهای طبیعی عبارتند از:



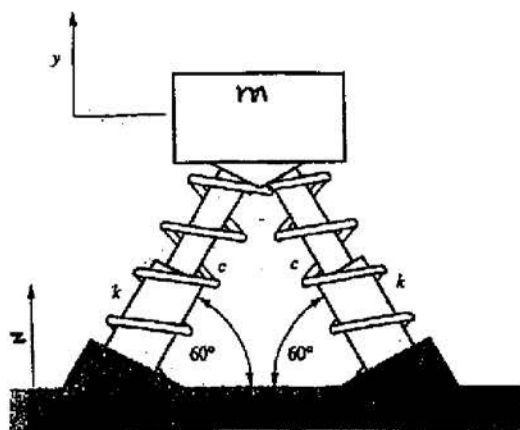
$$\omega_1 = \omega_2 = \cos\alpha\sqrt{\frac{k}{m}} \quad (۱)$$

$$\omega_1 = \omega_2 = \sin\alpha\sqrt{\frac{k}{m}} \quad (۲)$$

$$\omega_1 = \sqrt{\frac{k}{m}}, \quad \omega_2 = 0 \quad (۳)$$

$$\omega_1 = \sin\alpha\sqrt{\frac{k}{m}}, \quad \omega_2 = \cos\alpha\sqrt{\frac{k}{m}} \quad (۴)$$

۳۳- قطعه‌ای به جرم  $m$  مطابق شکل به وسیله یک جفت جاذب شوک از زمین ایزوله شده است. فرض کنید قطعه فقط در جهت قائم حرکت کند و تغییر مکان آن نسبت به موقعیت تعادل استاتیکی با  $y$  مشخص شود. اگر تغییر مکان زمین  $z(t)$  باشد، معادله حرکت عبارت است از:



$$m\ddot{y} + ky + c\dot{y} = -m\ddot{z} \quad (۱)$$

$$m\ddot{y} + ky + c\dot{y} = kz + m\ddot{z} \quad (۲)$$

$$m\ddot{y} + \frac{1}{\sqrt{3}}ky + \frac{1}{\sqrt{3}}c\dot{y} = -m\ddot{z} \quad (۳)$$

$$m\ddot{y} + \frac{1}{\sqrt{3}}ky + \frac{1}{\sqrt{3}}c\dot{y} = \frac{1}{\sqrt{3}}kz + \frac{1}{\sqrt{3}}c\dot{z} \quad (۴)$$

۳۴- سیستمی مطابق شکل در نظر بگیرید. با استفاده از روش دلی و شکل مود خطی، فرکانس اول برای ارتعاش طولی کدام است؟ (جرم بر واحد حجم  $\rho$ ، طول میل  $L$ ، سطح مقطع  $A$ ، ضریب الاستیسیته  $E$ )



$$\omega_n = \sqrt{\frac{k + \frac{EA}{L}}{\rho AL}} \quad (۱)$$

$$\omega_n = \sqrt{\frac{k}{\rho AL}} \quad (۲)$$

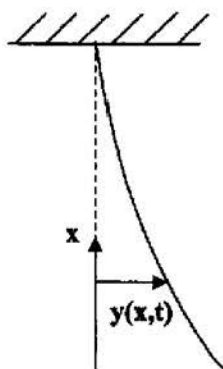
$$\omega_n = \sqrt{\frac{k + \frac{EA}{L}}{\frac{\rho AL}{3}}} \quad (۳)$$

$$\omega_n = \sqrt{\frac{3k + \frac{EA}{L}}{3\rho AL}} \quad (۴)$$

۳۵- فرق اساسی تئوری تیر اویلر برنولی با تئوری تیر تیموشنکو چیست؟

- (۱) فرض تغییر شکل برشی  
(۲) فرض اینرسی چرخشی  
(۳) فرض تغییر شکل برشی و اینرسی چرخشی  
(۴) فرقی ندارد.

۳۶- برای طناب آویزان شکل زیر با چگالی متغیر  $\rho(x) = \rho_0 \left(1 + \frac{x}{l}\right)$  و تحت نیروی جاذبه، معادله‌ی حاکم بر نوسانات جانبی کدام است؟ (توجه:  $y(x, t)$  معرف انحراف عرضی طناب از حالت تعادل و  $l$  طول طناب می‌باشد.)



$$g \frac{\partial y}{\partial x} + g l \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} \quad (۱)$$

$$\frac{r}{2} g \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = \left(1 + \frac{x}{l}\right) \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} \quad (۲)$$

$$g \frac{\partial y}{\partial x} + g l \left(1 + \frac{x}{l}\right) \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = \left(1 + \frac{x}{l}\right) \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} \quad (۳)$$

$$\left(1 + \frac{x}{l}\right) g \frac{\partial y}{\partial x} + g x \left(1 + \frac{x}{l}\right) \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = \left(1 + \frac{x}{l}\right) \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} \quad (۴)$$

۳۷- پروفیل پوشت پاسخ زمانی یک سیستم با یک درجه آزادی و میرایی خشک چگونه است؟

- (۱) خطی نزولی  
(۲) خطی صعودی  
(۳) نمایی نزولی  
(۴) نمایی صعودی

۳۸- بهترین میزان میرایی برای یک سیستم ارتعاشی تحت تأثیر ورودی ضربه چیست؟

- (۱) میرایی صفر  
(۲) میرایی بالا  
(۳) میرایی متوسط  
(۴) میرایی نسبتاً پایین

۳۹- پاسخ زمانی یک سیستم ارتعاشی با میرایی لزج در چه هنگامی به صفر می‌رسد؟

- (۱) در یک زمان متناهی  
(۲) در زمان بینهایت  
(۳) هیچ‌گاه  
(۴) نامعلوم

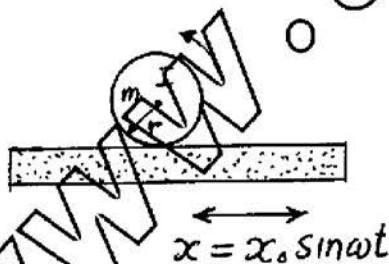
۴۰- استوانه‌ای به جرم  $m$  و ممان اینرسی  $I$  روی صفحه بدون جرمی حرکت غلتشی بدون لغزش انجام می‌دهد. چنانچه صفحه به صورت  $x = x_0 \sin \omega t$  نوسان کند معادله حرکت دیسک کدام است؟

$$I\ddot{\theta} + mr\dot{\theta} = mr^2\omega^2 \cos \omega t \quad (۱)$$

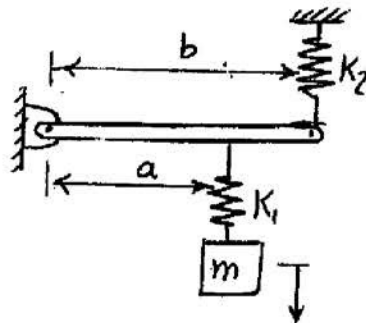
$$(I + mr^2)\ddot{\theta} = mr\omega^2 x_0 \sin \omega t \quad (۲)$$

$$I\ddot{\theta} + mr^2\dot{\theta} = mx_0\omega^2 \sin \omega t \quad (۳)$$

$$(I + mr^2)\ddot{\theta} + r\dot{\theta} = r\omega^2 x_0 \cos \omega t \quad (۴)$$



۴۱- فرکانس طبیعی  $\omega_n$  سیستم شکل زیر کدام است؟ (تغییر مکان‌ها را کوچک فرض کنید).



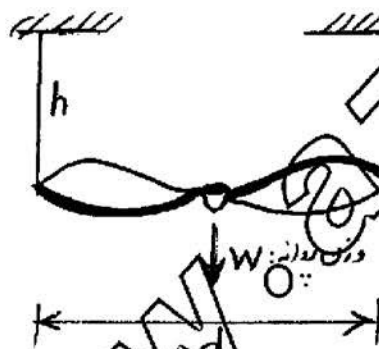
$$\sqrt{\frac{k_1 k_2 b^2}{m(k_1 a^2 + k_2 b^2)}} \quad (1)$$

$$\sqrt{\frac{(k_1 + k_2) a^2}{m(a^2 + b^2)}} \quad (2)$$

$$\sqrt{\frac{k_1^2 + k_2^2}{m(k_1 a + k_2 b)}} \quad (3)$$

$$\sqrt{\frac{(k_1 + k_2)(b + k_1 a)}{m(a + b)}} \quad (4)$$

۴۲- از سیستم شکل زیر برای اندازه‌گیری ممان اینرسی  $I_z$  پروانه هواپیما استفاده می‌شود. به این ترتیب که با آویزان کردن پروانه به وسیله دو سیم نازک از دو لبه پروانه و اندازه‌گیری عملی پریود نوسانات طبیعی و ارتباط آن با  $I_z$ ، مقدار ممان اینرسی تعیین می‌شود. اگر فرکانس طبیعی سیستم  $\omega_n$  باشد  $I_z$  از کدام رابطه زیر به دست می‌آید؟ (شکل پروانه متقارن و وزن پروانه است).



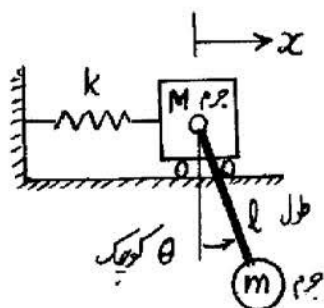
$$\frac{h^2 w}{r d \omega_n^2} \quad (1)$$

$$\frac{r h^2 w}{d \omega_n^2} \quad (2)$$

$$\frac{d^2 w}{r h \omega_n^2} \quad (3)$$

$$\frac{r d^2 w}{h \omega_n^2} \quad (4)$$

۴۳- در سیستم دو درجه آزادی شکل زیر برای  $\theta$  های کوچک، معادله دیفرانسیل تغییرات  $\theta$  بر حسب زمان و ارتباط آن با تغییرات  $x$  کدام گزینه است؟



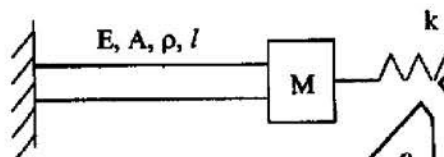
$$l\ddot{\theta} + g\theta + \ddot{x} = 0 \quad (۱)$$

$$M\ddot{x} + \frac{g}{l}\theta + ml^2\ddot{\theta} = 0 \quad (۲)$$

$$M\ddot{x} + ml\ddot{\theta} + g\theta + kx = 0 \quad (۳)$$

$$\ddot{x} + \frac{g}{l}\theta + l\ddot{\theta} + \frac{k}{M}x = 0 \quad (۴)$$

۴۴- برای ارتعاشات طولی سیستم زیر، معادله فرکانسی کدام یک از موارد زیر می باشد؟ (فرض:  $c = \sqrt{\frac{E}{\rho}}$ )



$$(M\omega^2 - k) \tan\left(\frac{\omega l}{c}\right) = \frac{EA\omega}{c} \quad (۱)$$

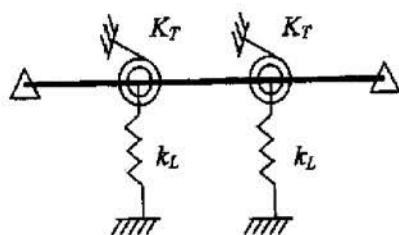
$$(M\omega^2 - k - \frac{EA}{l}) \tan\left(\frac{\omega l}{c}\right) = 1 \quad (۲)$$

$$M\omega^2 = k \sin\left(\frac{\omega l}{c}\right) + \frac{EA}{l} \cos\left(\frac{\omega l}{c}\right) \quad (۳)$$

$$M\omega^2 = \frac{EA\omega}{l} \sin\left(\frac{\omega l}{c}\right) + k \cos\left(\frac{\omega l}{c}\right) \quad (۴)$$

۴۵- برای تیر شکل زیر به طول  $l$ ، به منظور افزایش سختی خمشی، از دو فنر خطی و پیچشی در فواصل  $\left(\frac{l}{3}\right)$  از دو انتهای تیر استفاده شده است. با فرض اینکه فرکانس طبیعی اول تیر بدون وجود این فنرها  $\omega_1$  و شکل مود مربوطه  $\varphi_1(x) = \sin \frac{\pi x}{l}$  باشد، با در نظر گرفتن روش جمع آثار و اولین شکل مود ارتعاشی، فرکانس طبیعی جدید سیستم کدام

است؟ (فرض:  $M_1 = \int_0^l m(x) \varphi_1^2(x) dx$ )



$$\omega^r = \omega_1^r + \frac{1}{M_1} \left[ K_L + \frac{K_T}{l^r} \right] \quad (1)$$

$$\omega^r = \omega_1^r + \frac{1}{M_1} \left[ \frac{r}{l^r} K_L + \frac{K_T}{l^r} \left( \frac{\pi}{l} \right)^r \right] \quad (2)$$

$$\omega^r = \omega_1^r + \frac{1}{M_1} \left[ \frac{r}{l^r} K_L + \frac{K_T}{l^r} \left( \frac{\pi}{l} \right)^r \right] \quad (3)$$

$$\omega^r = \omega_1^r + \frac{1}{M_1} \left[ \frac{r}{l^r} K_L + K_T \left( \frac{\pi}{l} \right)^r \right] \quad (4)$$

www.azmoon.ir